



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

经浙江省中小学教辅材料
评议委员会评议通过

全品智能作业

学·练·考

主编 肖德好

学习册

本册主编 徐国平

高中数学

选择性必修第一册 RJA 浙江省

长江出版传媒

崇文书局

CONTENTS



第一章 空间向量与立体几何 001

1.1 空间向量及其运算 001

1.1.1 空间向量及其线性运算 001

第1课时 空间向量及线性运算 001

第2课时 共线向量与共面向量 003

1.1.2 空间向量的数量积运算 004

1.2 空间向量基本定理 006

1.3 空间向量及其运算的坐标表示 008

1.3.1 空间直角坐标系 008

1.3.2 空间向量运算的坐标表示 010

1.4 空间向量的应用 012

1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置

关系 012

第1课时 空间中点、直线和平面的向量

表示 012

第2课时 空间中直线、平面的平行 014

第3课时 空间中直线、平面的垂直 016

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

..... 018

第1课时 用空间向量研究距离问题 018

第2课时 用空间向量研究夹角问题 019

本章总结提升 022

第二章 直线和圆的方程 025

2.1 直线的倾斜角与斜率 025

2.1.1 倾斜角与斜率 025

2.1.2 两条直线平行和垂直的

判定 027

2.2 直线的方程 028

2.2.1 直线的点斜式方程 028

2.2.2 直线的两点式方程 030

2.2.3 直线的一般式方程 031

2.3 直线的交点坐标与距离公式 033

2.3.1 两条直线的交点坐标 033

2.3.2 两点间的距离公式 034

2.3.3 点到直线的距离公式 036

2.3.4 两条平行直线间的距离 036

2.4 圆的方程 038

2.4.1 圆的标准方程 038

2.4.2 圆的一般方程 040

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系 042

2.5.1 直线与圆的位置关系 042

第1课时 直线与圆的位置关系（一） 042

第2课时 直线与圆的位置关系（二） 043

2.5.2 圆与圆的位置关系	045	3.2 双曲线	059
专题课（一） 与圆有关的最值问题	047	3.2.1 双曲线及其标准方程	059
▶ 本章总结提升	048	3.2.2 双曲线的简单几何性质	061
		第1课时 双曲线的简单几何性质	061
		第2课时 直线与双曲线的位置关系	
		及应用	063
第三章 圆锥曲线的方程	051	专题课（二） 圆锥曲线的离心率	065
3.1 椭圆	051	3.3 抛物线	066
3.1.1 椭圆及其标准方程	051	3.3.1 抛物线及其标准方程	066
第1课时 椭圆及其标准方程	051	3.3.2 抛物线的简单几何性质	068
第2课时 与椭圆有关的轨迹问题	053	第1课时 抛物线的简单几何性质	068
3.1.2 椭圆的简单几何性质	054	第2课时 直线与抛物线的位置关系	070
第1课时 椭圆的简单几何性质		▶ 本章总结提升	072
（一）	054		
第2课时 椭圆的简单几何性质			
（二）	055		
第3课时 直线与椭圆的位置关系	057	■ 参考答案	077

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其线性运算

第1课时 空间向量及线性运算

- 学习目标**
1. 经历由平面向量推广到空间向量的过程,理解空间向量的概念.
 2. 经历由平面向量的运算及其运算律推广到空间向量的过程.
 3. 掌握空间向量的线性运算.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 空间向量及有关概念

1. 概念与表示

(1)空间向量:在空间,我们把具有_____和_____的量叫作空间向量.空间向量用字母 $a, b, c, \dots$ 表示,也用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示.

(2)空间向量的模:空间向量的大小叫作空间向量的_____或_____.有向线段的_____表示空间向量的模.

2. 几类特殊的空间向量

名称	定义及表示
零向量	规定长度为0的向量叫作_____,记为 $\mathbf{0}$
单位向量	_____的向量叫作单位向量
相反向量	与向量 a 长度_____而方向_____的向量,叫作 a 的相反向量,记为_____
共线(平行)向量	如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线_____,那么这些向量叫作共线向量或平行向量. 规定:零向量与任意向量_____,即对于任意向量 a ,都有 $\mathbf{0}$ _____ a
相等向量	方向_____且模_____的向量叫作相等向量.在空间,_____且_____的有向线段表示同一向量或相等向量

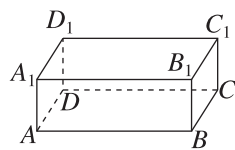
典例解析

例1 (1)(多选题)给出下列四个说法,其中正确的是 ()

- A. 若两个空间向量相等,则它们的起点相同,终点也相同
- B. 若空间向量 a, b 满足 $|a| = |b|$, 则 $a = b$
- C. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,必有 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$
- D. 若空间向量 m, n, p 满足 $m = n, n = p$, 则 $m = p$

(2)(多选题)[2026·陕西宝鸡高二质检] 如图所示,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=3$, $AD=2$, $AA_1=1$, 则在以八个顶点中的两个分别为起点和终点的向量中, ()

- A. 单位向量有8个
- B. 与 $\overrightarrow{AB}$ 相等的向量有3个
- C. $\overrightarrow{AA_1}$ 的相反向量有4个
- D. 模为 $\sqrt{5}$ 的向量有4个



[素养小结]

解答空间向量有关概念问题的关键点及注意点:

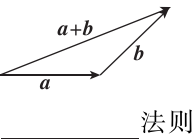
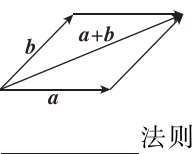
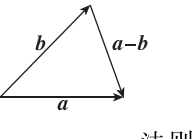
- (1)关键点:紧紧抓住向量的两个要素,即大小和方向.
- (2)注意点:①零向量不是没有方向,它的方向是任意的.②单位向量的方向虽然不一定相同,但它们的长度都是1.③两个向量的模相等,不一定是相等向量;反之,若两个向量相等,则它们不仅模相等,而且方向相同.若两个向量的模相等,方向相反,则它们为相反向量.

◆ 要点二 空间向量的线性运算

1. 空间向量的自由性

任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量,这样任意两个_____的运算就可以转化为_____的运算.

2. 空间向量的线性运算

运算	定义	法则 (或几何意义)	运算律
加法	求两个向量_____的运算	 _____法则  _____法则	(1) 加法交换律: $a + b =$ _____; (2) 加法结合律: $(a + b) + c =$ _____
减法	减去一个向量相当于加上这个向量的_____	 _____法则	$a - b =$ _____
数乘	实数 λ 与向量 a 的积是一个_____,这种运算叫作向量的_____,记作_____	(1) $ \lambda a =$ _____. (2) 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的方向_____;当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的方向_____;当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda a =$ _____	(1) 对向量加法的分配律: $\lambda(a + b) =$ _____; (2) 对实数加法的分配律: $(\lambda + \mu)a =$ _____

D 典例解析

角度1 空间向量的加、减运算

例2 (1)(多选题)[2026·四川成都双流区期中] 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,下列各式的运算结果为向量 $\overrightarrow{BD_1}$ 的是 ()

- A. $(\overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{A_1A}) - \overrightarrow{AB}$
- B. $(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) - \overrightarrow{D_1C_1}$
- C. $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{DD_1}$
- D. $(\overrightarrow{B_1D_1} - \overrightarrow{A_1A}) + \overrightarrow{DD_1}$

(2)化简: $\overrightarrow{OB} - [\overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC})] =$ _____.

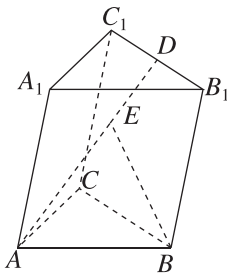
[素养小结]

空间向量加法、减法运算的两个常用技巧:

- (1)巧用相反向量:灵活运用相反向量可使向量首尾相接;
- (2)巧用平移:务必注意和向量、差向量的方向,必要时可采用空间向量的自由平移获得运算结果.

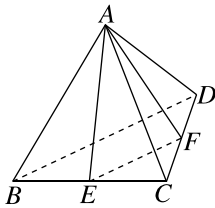
角度2 空间向量的数乘运算

例3 如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是棱 B_1C_1 的中点, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{ED}$. 设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b, \overrightarrow{AA_1} = c$,试用向量 a, b, c 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{BE}$.



变式 [教材 P5 练习 T4] 如图,已知四面体 $ABCD$, E, F 分别是 BC, CD 的中点. 化简下列表达式,并在图中标出化简结果:

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;
- (2) $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$;
- (3) $\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.



第2课时 共线向量与共面向量

- 学习目标**
1. 理解向量共线、向量共面的定义.
 2. 掌握向量共线的充要条件和向量共面的充要条件.
 3. 会证明空间三点共线、四点共面.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 空间向量共线的充要条件

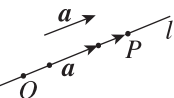
1. 空间两向量共线的充要条件

对任意两个空间向量 $a, b (b \neq 0)$, $a \parallel b$ 的充要条件是存在实数 λ , 使 _____.

2. 空间直线的确定

(1) 直线的方向向量

如图, O 是直线 l 上一点, 在直线 l 上取 _____, 则对于直线 l 上任意一点 P , 存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{OP} = \lambda a$. 把与向量 a _____ 的非零向量称为直线 l 的方向向量.



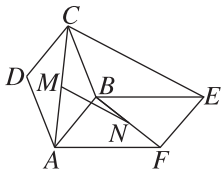
(2) 空间直线的确定

空间直线可以由其上一点和它的 _____ 确定.

D 典例解析

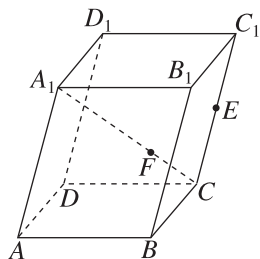
例 1 (1) 如图所示, 四边形

$ABCD$ 与四边形 $ABEF$ 都是平行四边形且不共面, M, N 分别是 AC, BF 的中点, 则 $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{MN}$ _____ (填“共线”或“不共线”).



(2) 在空间四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} + \lambda\overrightarrow{DB}$, 则 $\lambda =$ _____.

变式 如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $\overrightarrow{C_1C} = 2\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{A_1C} = 3\overrightarrow{FC}$. 求证: A, F, E 三点共线.

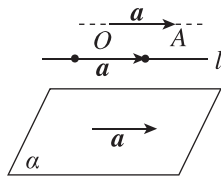


◆ 要点二 空间向量共面的充要条件

1. 共面向量的定义

(1) 向量与直线平行

如图, 如果表示向量 a 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所在的直线 OA 与直线 l _____ 或 _____, 那么称向量 a 平行于直线 l .



(2) 向量与平面平行

如图, 如果表示向量 a 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所在的直线 OA _____ 或 _____, 那么称向量 a 平行于平面 α .

(3) 共面向量

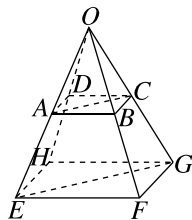
平行于同一个平面的向量, 叫作 _____.

2. 共面向量定理

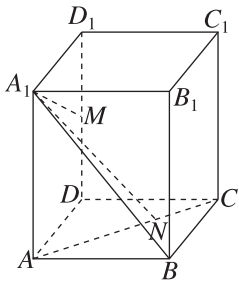
如果两个向量 a, b 不共线, 那么向量 p 与向量 a, b 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y) , 使 _____.

D 典例解析

例 2 [教材 P5 例 1] 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, 过平面 AC 外一点 O 作射线 OA, OB, OC, OD , 在四条射线上分别取点 E, F, G, H , 使 $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} = \frac{OG}{OC} = \frac{OH}{OD} = k$. 求证: E, F, G, H 四点共面.



例 3 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为 DD_1 的中点, N 在线段 AC 上,且 $AN:NC=2:1$. 求证: $\overrightarrow{A_1N}$ 与 $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1M}$ 共面.



变式 [2026·江苏常州高二质检] 已知空间 A, B, C, D 四点共面,且其中任意三点均不共线,设 P 为空间中任意一点,若 $\overrightarrow{BD} = 6\overrightarrow{PA} - 4\overrightarrow{PB} + \lambda\overrightarrow{PC}$, 则 $\lambda =$ ()

- A. 2
- B. -2
- C. 1
- D. -1

[素养小结]

- (1)证明空间三个向量共面的方法:证明其中一个向量可以表示成另两个向量的线性组合,即若 $p = xa + yb$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则向量 p, a, b 共面.
- (2)证明空间四点共面的思路:对于空间四点 P, M, A, B , 可通过证明下列结论来证明 P, M, A, B 四点共面.
 - ①存在实数 x, y , 使 $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB}$ 成立;
 - ②对空间中一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ ($x, y \in \mathbf{R}$);
 - ③对空间中一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OM}$ ($x + y + z = 1$).

1.1.2 空间向量的数量积运算

- 学习目标**
- 1. 结合立体几何与空间向量的特征,了解空间向量投影的概念.
 - 2. 类比平面向量,掌握空间向量的数量积.
 - 3. 类比平面向量并借助空间图形,掌握空间向量的有关运算律,能运用数量积解决空间中的垂直、夹角及距离问题.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 空间向量的数量积运算

1. 空间向量的夹角

定义	已知两个非零向量 a, b , 在空间任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$, 则 $\angle AOB$ 叫作向量 a, b 的 _____, 记作 _____
取值范围	_____
向量垂直	如果 $\langle a, b \rangle =$ _____, 那么向量 a, b 互相垂直, 记作 $a \perp b$

2. 空间向量的数量积

(1)概念:已知两个非零向量 a, b , 则 _____

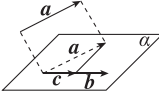
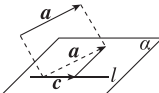
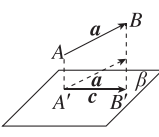
叫作 a, b 的数量积, 记作 $a \cdot b$, 即 $a \cdot b =$ _____.

特别地, 零向量与任意向量的数量积为 0.

(2)空间向量数量积的性质与运算律

性质	运算律
$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b =$ _____	$(\lambda a) \cdot b =$ _____, $\lambda \in \mathbf{R}$
$a^2 = a \cdot a = a \cdot a \cdot \cos \langle a, a \rangle =$ _____	$a \cdot b =$ _____ (交换律)
$\cos \langle a, b \rangle =$ _____	$(a + b) \cdot c =$ _____ (分配律)

3. 投影向量的概念

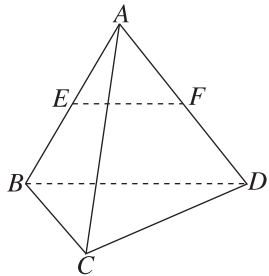
	作法	图形表示	符号表示
向量 a 在向量 b 上的投影向量	将向量 a, b (直线 l) 平移到同一个平面 α 内, 利用平面上向量的投影, 得到与向量 b (直线 l 的方向向量) 共线的向量 c		$c =$ _____ _____
向量 a 在直线 l 上的投影向量			
向量 a 在平面 β 上的投影向量	分别由向量 a 的起点 A 和终点 B 作平面 β 的垂线, 垂足分别为 A', B' , 得到向量 $\overrightarrow{A'B'}$		$\overrightarrow{A'B'}$

注: 向量 $a, \overrightarrow{A'B'}$ 的夹角就是向量 a 所在直线与平面 β 所成的角.

D 典例解析

例 1 如图所示, 在棱长为 1 的正四面体 $A-BCD$ 中, E, F 分别是 AB, AD 的中点, 求:

- (1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA}$;
- (2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BD}$;
- (3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC}$;
- (4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.



变式 (1) [2026 · 陕西渭南期中] 已知 a, e 都是空间向量, $|a| = 2, e$ 为单位向量, $\langle a, e \rangle = \frac{2\pi}{3}$, 则向量 a 在向量 e 上的投影向量为 _____.

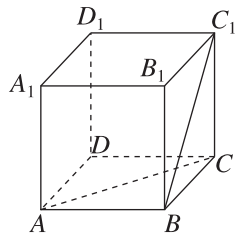
(2) 正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 2, 点 D 是 $\triangle PAB$ 的重心, 则 $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____.

◆ 要点二 向量的数量积在几何中的应用

D 典例解析

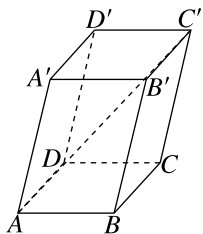
例 2 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求:

- (1) $\overrightarrow{BC_1}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 的夹角;
- (2) 异面直线 BC_1 与 CA 所成角的大小.



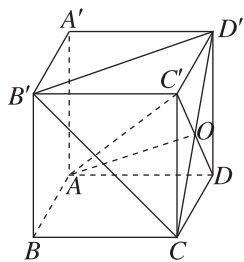
变式 1 [教材 P7 例 2] 如图, 在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, $AB = 5, AD = 3, AA' = 7, \angle BAD = 60^\circ, \angle BAA' = \angle DAA' = 45^\circ$. 求:

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$;
- (2) AC' 的长 (精确到 0.1).



变式 2 如图,在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,
 CD' 与 DC' 相交于点 O ,求证:

- (1) $AO \perp CD'$;
 (2) $AC' \perp$ 平面 $B'CD'$.



[素养小结]

(1) 求两个空间向量的夹角的两种常用方法:

① 结合图形,平移向量,利用空间向量夹角的定义来求,但要注意向量夹角的取值范围.

② 先求 $a \cdot b, |a|, |b|$,再利用公式 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ 求 $\cos \langle a, b \rangle$,最后确定 $\langle a, b \rangle$.

(2) 求两点间的距离或线段长度的一般步骤:

① 将两点间的线段用向量表示;

② 用其他已知夹角和模的向量表示该向量;

③ 利用 $|a| = \sqrt{a^2}$,计算出 $|a|$,即得所求距离或长度.

(3) 证明线线垂直,线面垂直的思路:

① 证明线线垂直的关键是确定直线的方向向量,根据两直线的方向向量的数量积为 0,证明线线垂直;

② 证明直线与平面垂直则要利用直线与平面垂直的判定定理,转化为证明直线与直线垂直.

1.2 空间向量基本定理

- 学习目标**
1. 在平面向量基本定理的基础上,能借助投影进行向量分解,掌握空间向量基本定理.
 2. 知道基底、单位正交基底,并能在选定基底下进行向量的表示及运算.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 空间向量基本定理

1. 空间向量基本定理

如果三个向量 a, b, c _____,那么对任意一个空间向量 p ,存在 _____ 的有序实数组 (x, y, z) ,使得 _____.

我们把 $\{a, b, c\}$ 叫作空间的一个 _____, a, b, c 都叫作 _____. 空间任意三个 _____ 的向量都可以构成空间的一个基底.

2. 单位正交基底

如果空间的一个基底中的三个基向量 _____,且长度都为 _____,那么这个基底叫作单位正交基底,常用 _____ 表示. 把一个空间向量分解为三个 _____ 的向量,叫作把空间向量进行正交分解.

典例解析

例 1 已知 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 是空间的一个基底,且 $\overrightarrow{OA} = e_1 + 2e_2 - e_3, \overrightarrow{OB} = -3e_1 + e_2 + 2e_3, \overrightarrow{OC} =$

$e_1 + e_2 - e_3$,试判断 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 能否构成空间的一个基底.

变式 已知 M, A, B, C 为空间的四个点,且任意三点不共线, O 为空间中一点,下列可能使 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 构成空间的一个基底的关系式是 ()

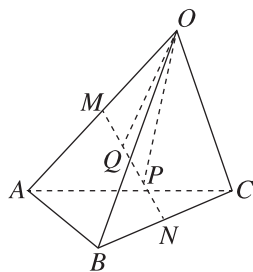
- A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
 B. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$
 C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
 D. $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

◆ 要点二 用基底表示空间向量

典例解析

例 2 如图所示,在四面体 $O-ABC$ 中, M,N 分别是 OA,BC 的中点, P,Q 是 MN 的两个三等分点(点 P 靠近点 N ,点 Q 靠近点 M).

- (1)用基底 $\{\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}\}$ 表示向量 $\vec{OP}$;
 (2)若 $\vec{OQ} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$,求实数 x, y, z 的值.



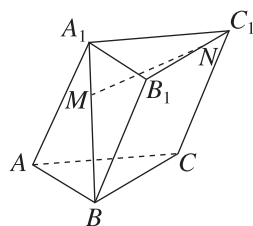
◆ 要点三 空间向量基本定理的应用

典例解析

角度 1 垂直、平行关系的证明

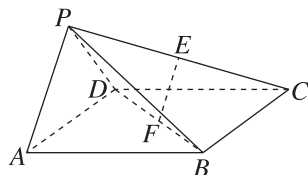
例 3 如图所示,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M,N 分别是 A_1B, B_1C_1 上的点,且 $BM = 2MA_1, B_1N = 2NC_1$. 用空间向量解决如下问题:

- (1)若 $\angle BAA_1 = \angle CAA_1, AB = AC$,证明:
 $BC \perp AA_1$;
 (2)证明: $MN \parallel$ 平面 ACC_1A_1 .



变式 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$,且 $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$, E, F 分别为 PC, BD 的中点. 用向量方法证明:

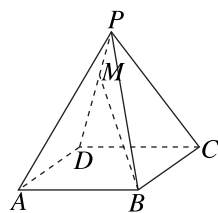
- (1) $EF \parallel$ 平面 PAD ;
 (2) $EF \perp$ 平面 PCD .



角度 2 求两直线的夹角

例 4 [2026 · 浙江杭州期中] 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形,侧棱 AP 的长为 2,且 $\vec{AP}$ 与 $\vec{AB}, \vec{AD}$ 的夹角都为 60° , M 在棱 PD 上, $\vec{PM} = \frac{1}{3}\vec{PD}$, 设 $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}, \vec{AP} = \vec{c}$.

- (1)试用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示向量 $\vec{BM}$;
 (2)求异面直线 BM 与 AP 所成的角.



1.3 空间向量及其运算的坐标表示

1.3.1 空间直角坐标系

- 学习目标**
1. 在空间向量基本定理的基础上,了解空间直角坐标系.
 2. 结合简单几何体,能写出有关点和向量的坐标.

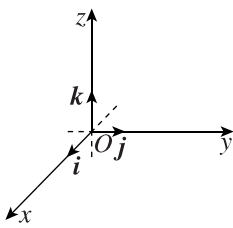
课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系

定义:如图,在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{i, j, k\}$. 以点 O 为原点,分别以 i, j, k 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴: x 轴、 y 轴、 z 轴,它们都叫作_____. 这时我们就建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$, O 叫作_____, i, j, k 都叫作_____,通过每两条坐标轴的平面叫作_____,分别称为 Oxy 平面, Oyz 平面, Ozx 平面.



2. 空间直角坐标系的画法

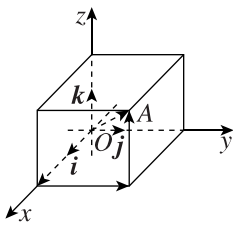
(1)空间直角坐标系的画法:画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时,一般使 $\angle xOy =$ _____, $\angle yOz =$ _____.

(2)右手直角坐标系:在空间直角坐标系中,让右手拇指指向 x 轴的正方向,食指指向 y 轴的正方向,如果中指指向_____,则称这个坐标系为右手直角坐标系.

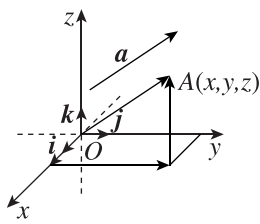
◆ 要点二 空间向量的坐标

1. 空间中点的坐标

如图,由空间向量基本定理,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $\vec{OA} =$ _____. 在单位正交基底 $\{i, j, k\}$ 下与向量 $\vec{OA}$ 对应的有序实数组 (x, y, z) , 叫作点 A 在空间直角坐标系中的坐标,记作_____,其中 x 叫作点 A 的横坐标, y 叫作点 A 的纵坐标, z 叫作点 A 的竖坐标.



作 $\vec{OA} = a$. 由空间向量基本定理,存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使 $a = xi + yj + zk$. 有序实数组_____叫作 a 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,可简记作_____.

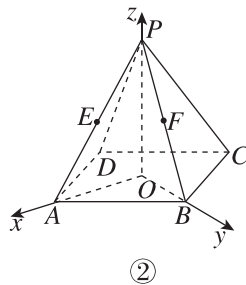
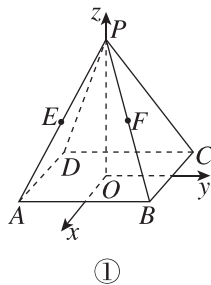


D 典例解析

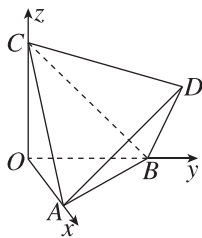
例 1 已知在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, O 为底面中心,底面边长和高都是 2, E, F 分别是侧棱 PA, PB 的中点.

(1)如图①,以 O 为坐标原点,分别以 $\vec{DA}, \vec{DC}, \vec{OP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,写出点 A, B, C, D, P, E, F 的坐标;

(2)如图②,以 O 为坐标原点,分别以 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OP}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,写出点 A, B, C, D, P, E, F 的坐标.



变式 如图,棱长为 $\sqrt{2}$ 的正四面体 $A-BCD$ 的三个顶点 A, B, C 分别在空间直角坐标系的 x, y, z 轴的正半轴上,则顶点 D 的坐标为_____.



[素养小结]

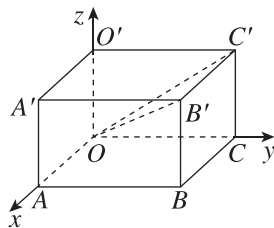
(1)建立空间直角坐标系时应遵循的两个原则:①让尽可能多的点落在坐标轴上或坐标平面内;②充分利用几何图形的对称性.

(2)求某点 M 的坐标的方法:作 MM' 垂直于平面 Oxy ,垂足为 M' ,求 M' 的横坐标 x ,纵坐标 y ,即点 M 的横坐标 x ,纵坐标 y ,再求点 M 在 z 轴上射影的竖坐标 z ,即为点 M 的竖坐标 z ,于是得到点 M 的坐标 (x, y, z) .

例2 如图,在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中有一长方体 $OABC-O'A'B'C'$,且 $OA=6, OC=8, OO'=5$.

(1)写出点 B' 的坐标,并将 $\overrightarrow{OB'}$ 用单位正交基底 $\{i, j, k\}$ 表示;

(2)求 $\overrightarrow{OC'}$ 的坐标.



◆ 要点三 空间中点的对称问题

D 典例解析

例3 在空间直角坐标系中,点 $P(-2, 1, 4)$.

- (1)求点 P 关于 x 轴的对称点 P_1 的坐标;
- (2)求点 P 关于 Oxy 平面的对称点 P_2 的坐标;
- (3)求点 P 关于点 $M(2, -1, -4)$ 的对称点 P_3 的坐标.

变式 (多选题)下列关于空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点 $P(1, 2, 3)$ 的说法正确的是 ()

- A. 线段 OP 的中点坐标为 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$
- B. 点 P 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(-1, -2, -3)$
- C. 点 P 关于原点对称的点的坐标为 $(1, 2, -3)$
- D. 点 P 关于 Oxy 平面对称的点的坐标为 $(1, 2, -3)$

[素养小结]

在空间直角坐标系中,点 $P(x, y, z)$ 关于坐标轴和坐标平面的对称点的坐标特点如下:

- (1)关于原点的对称点的坐标为 $(-x, -y, -z)$;
- (2)关于横轴(x 轴)的对称点的坐标为 $(x, -y, -z)$;
- (3)关于纵轴(y 轴)的对称点的坐标为 $(-x, y, -z)$;
- (4)关于竖轴(z 轴)的对称点的坐标为 $(-x, -y, z)$;
- (5)关于 Oxy 平面的对称点的坐标为 $(x, y, -z)$;
- (6)关于 Oyz 平面的对称点的坐标为 $(-x, y, z)$;
- (7)关于 Ozx 平面的对称点的坐标为 $(x, -y, z)$.

1.3.2 空间向量运算的坐标表示

- 学习目标**
1. 类比平面向量,掌握空间向量的线性运算及其坐标表示.
 2. 基于运算,能探究空间向量模的坐标公式、空间两点间的距离公式.
 3. 类比平面向量,知道空间向量平行、垂直、夹角的坐标表示.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 空间向量运算的坐标表示

若 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, 则

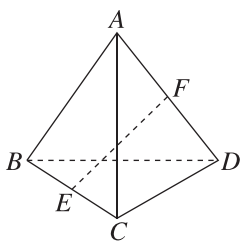
加法	$a + b =$ _____
减法	$a - b =$ _____
数乘	$\lambda a =$ _____, $\lambda \in \mathbf{R}$
数量积	$a \cdot b =$ _____
向量长度	$ a =$ _____ = _____
向量夹角公式	$\cos \langle a, b \rangle =$ _____ = _____
空间两点间的距离公式	设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点, O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} =$ _____, $P_1P_2 =$ _____ = _____

D 典例解析

例 1 已知 $a = (2, -1, -2)$, $b = (0, -1, 4)$, 求 $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $2a \cdot (-b)$, $(a + b) \cdot (a - b)$.

变式 如图,在四面体 $A-BCD$ 中,若向量 $\overrightarrow{AB} = (-3, 5, 2)$, $\overrightarrow{CD} = (-7, -1, -4)$, E, F 分别为 BC, AD 的中点,则 $\overrightarrow{EF}$ 的坐标为 ()

- A. $(2, 3, 3)$
- B. $(-2, -3, -3)$
- C. $(5, -2, 1)$
- D. $(-5, 2, -1)$



◆ 要点二 空间向量平行、垂直的坐标表示及应用

已知 $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$.

(1) 平行关系: $a \parallel b \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____ ($\lambda \in \mathbf{R}$);

(2) 垂直关系: $a \perp b \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____.

D 典例解析

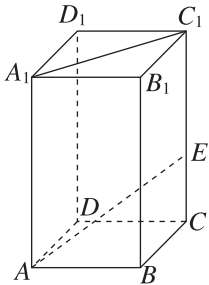
例 2 已知空间三点 $A(-2, 0, 2)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(-3, 0, 4)$. 设 $a = \overrightarrow{AB}$, $b = \overrightarrow{AC}$.

- (1) 若 $|c| = 3$, $c \parallel \overrightarrow{BC}$, 求 c ;
- (2) 若 $ka + b$ 与 $ka - 2b$ 互相垂直, 求 k .

变式 (1) 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 向量 $\mathbf{a} = (x, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, y, 2)$, $\mathbf{c} = (1, -2, 1)$, 且 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, 则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = (\quad)$

- A. $\sqrt{14}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{29}$ D. $2\sqrt{7}$

(2) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = BC$, E 是侧棱 CC_1 上的任意一点, 在线段 A_1C_1 上是否存在一个定点 P , 使得 D_1P 总垂直于 AE ? 请说明理由.

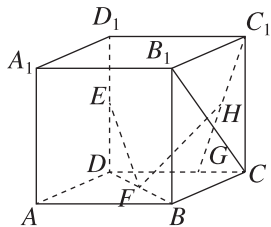


◆ 要点三 利用空间向量的坐标运算求夹角及长度

D 典例解析

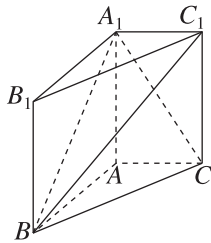
例 3 如图, 在棱长为 2 的正方体中, E, F 分别是 DD_1, DB 的中点, G 在棱 CD 上, 且 $CG = \frac{1}{3}CD$, H 是 C_1G 的中点. 建立适当的空间直角坐标系, 解决下列问题.

- (1) 求证: $EF \perp B_1C$;
 (2) 求 $\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{C_1G} \rangle$;
 (3) 求 FH 的长.



变式 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 2$, $AA_1 = 3$.

- (1) 求 $\cos \langle \overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{A_1C} \rangle$;
 (2) 设 $3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{BC}$, 求 $|\overrightarrow{AG}|$.



[素养小结]

利用空间向量的坐标运算求夹角与距离的一般步骤:

- (1) 建系: 根据题目中的几何图形建立恰当的空间直角坐标系.
- (2) 求坐标: ① 求出相关点的坐标; ② 写出向量的坐标.
- (3) 论证、计算: 结合公式进行论证、计算.
- (4) 转化: 转化为夹角与距离问题.

拓展 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是底面 $ABCD$ (含边界) 上一动点, 满足 $A_1P \perp AC_1$, 则线段 A_1P 长度的取值范围是 $(\quad)$

- A. $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}]$ B. $[\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{3}]$
 C. $[1, \sqrt{2}]$ D. $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$

1.4 空间向量的应用

1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系

第1课时 空间中点、直线和平面的向量表示

学习目标

1. 联系空间向量与立体几何,理解直线的方向向量和平面的法向量.
2. 结合空间几何体,能求出有关直线的方向向量和平面的法向量.
3. 在空间点的向量表示的基础上,能借助直线的方向向量和平面的法向量来刻画直线和平面.

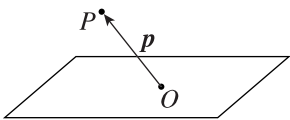
课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 空间中点与直线的向量表示

1. 空间中点的向量表示

如图,在空间中,我们取一_____作为基点,那么空间中任意一点 P 就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示. 我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的_____.



2. 空间中直线的向量表示

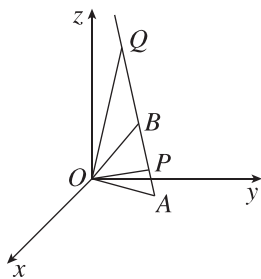
确定直线的条件	图形表示	向量表示	作用
a 是直线 l 的方向向量,在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB} = a$, P 是直线 l 上的任意一点		$\overrightarrow{AP} = ta =$ _____	空间任意直线由直线上一点及直线的方向向量唯一确定
a 是直线 l 的方向向量,在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB} = a$, P 是直线 l 上的任意一点, O 是空间中的任意一点		$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} +$ $ta =$ _____	

D 典例解析

角度1 确定空间中点的位置

例1 已知点 $A(2,4,0), B(1,3,3)$,在直线 AB 上取 P, Q 两点,位置如图所示,求满足下列条件的点 P 和点 Q 的坐标.

- (1) $AP : PB = 1 : 2$;
- (2) $AQ : QB = 2 : 1$.



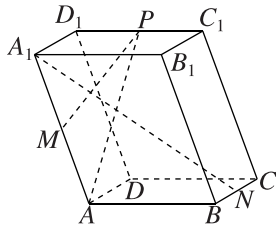
变式 [2026·陕西宝鸡质检] 已知点 $A(4,1,3), B(2,-5,1), C$ 为线段 AB 上一点且 $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,则点 C 的坐标为 ()

- A. $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ B. $(\frac{3}{8}, -3, 2)$
C. $(\frac{10}{3}, -1, \frac{7}{3})$ D. $(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$

角度2 求空间直线的方向向量

例2 如图所示,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设 $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$, M, N, P 分别是 AA_1, BC, C_1D_1 的中点,以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一个基底.

- (1)求直线 AP 的一个方向向量;
- (2)求直线 A_1N 的一个方向向量;
- (3)求直线 MP 的一个方向向量.



变式 已知直线 l 的一个方向向量为 $\mathbf{m} = (2, -1, 3)$,且直线 l 过点 $A(0, a, 3)$ 和点 $B(-1, 2, b)$,则 $a+b=$ ()

- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 3

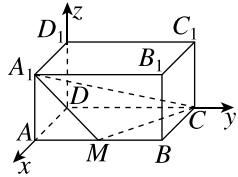
◆ 要点二 空间中平面的向量表示

确定平面的条件	图形表示	向量表示
两条直线相交于点 O ,它们的方向向量分别为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, P 为平面 α 内任意一点		$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$
P 是平面 ABC 内的任意一点, O 是空间中的任意一点		$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$
给定点 A 和平面 α 的法向量 $\mathbf{a}$,以及平面 α 内一点 P		$\{P \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{AP} = 0\}$

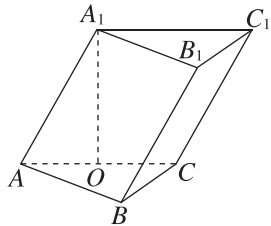
D 典例解析

例3 [教材 P28 例1] 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4, BC=3, CC_1=2$, M 是 AB 的中点.以 D 为原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

- (1)求平面 BCC_1B_1 的法向量;
- (2)求平面 MCA_1 的法向量.



变式 如图所示,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1=AC=2, AB=BC, AB \perp BC$, O 为 AC 的中点, $A_1O \perp$ 平面 ABC .建立适当的空间直角坐标系,分别求平面 A_1ABB_1 与平面 AA_1C_1C 的法向量.



第2课时 空间中直线、平面的平行

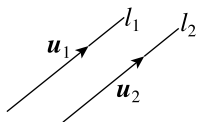
- 学习目标**
1. 能用直线的方向向量和平面的法向量刻画直线与直线、直线与平面、平面与平面的平行.
 2. 能分析和解决一些立体几何中有关平行的问题,体会向量方法与综合几何方法的共性和差异,体会直线的方向向量和平面的法向量的作用,感悟向量是研究几何问题的有效工具.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 直线与直线平行

如图,设 u_1, u_2 分别是直线 l_1, l_2 的方向向量,则 $l_1 // l_2 \Leftrightarrow$ _____
 $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $u_1 =$ _____.



D 典例解析

例1 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=4$, $AD=3$, $AA_1=2$, 点 P, Q, R, S 分别是 AA_1, D_1C_1, AB, CC_1 的中点, 求证: $PQ // RS$.

◆ 要点二 线面平行与面面平行

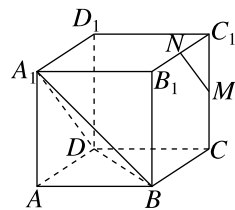
设 u 是直线 l 的方向向量, n_1, n_2 分别是平面 α, β 的法向量, 则

平行关系	对应线面	图形	满足条件
线面平行	l 与 α ($l \not\subset \alpha$)		$l // \alpha \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ $u \cdot n_1 =$ _____
面面平行	α 与 β		$\alpha // \beta \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $n_1 =$ _____

D 典例解析

角度1 直线与平面平行

例2 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是 C_1C, B_1C_1 的中点, 求证: $MN //$ 平面 A_1BD .



变式 (1) 已知两平行直线的一个方向向量分别为 $a = (4-2m, m-1, m-1)$, $b = (4, 2-2m, 2-2m)$, 则实数 m 的值为 ()

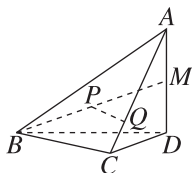
- A. 1 B. 3
C. 1 或 3 D. 以上答案都不正确

(2) (多选题) 在平行六面体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 若 AB 所在直线的方向向量为 $(-2, 1, 3)$, 则 $C'D'$ 所在直线的方向向量可能为 ()

- A. $(2, 1, 3)$ B. $(2, -1, -3)$
C. $(-4, 2, 6)$ D. $(4, -2, 6)$

变式 (1) [2026 · 江苏无锡高二期中] 已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{u} = (1, 5, 4)$, 平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (3, 5, x)$, 若直线 l 与平面 α 平行, 则实数 $x =$ _____.

(2) 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $AD \perp$ 平面 BCD , $BC \perp CD$, $AD = 2$, M 是 AD 的中点, P 是 BM 的中点, 点 Q 在棱 AC 上, 且 $AQ = 3QC$. 证明: $PQ \parallel$ 平面 BCD .

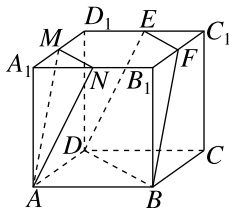


[素养小结]

用向量法证明线面平行的方法: ①证明直线的方向向量与平面内的某一向量是共线向量且直线不在平面内; ②证明直线的方向向量可以用平面内两个不共线的向量表示, 且直线不在平面内; ③证明直线的方向向量与平面的法向量垂直且直线不在平面内.

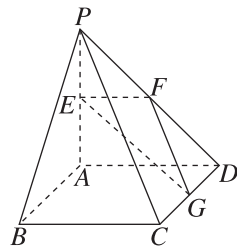
角度2 平面与平面平行

例3 [2026 · 安徽亳州高二期中] 如图, 在棱长为4的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N, E, F 分别是棱 $A_1D_1, A_1B_1, D_1C_1, B_1C_1$ 的中点, 求证: 平面 $AMN \parallel$ 平面 $EFBD$.



变式 (1) 已知 $\boldsymbol{n}_1 = (\sqrt{3}, x, 2)$, $\boldsymbol{n}_2 = (-3, \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 分别是平面 α, β 的一个法向量, 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $x =$ _____.

(2) 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp AD$, 且 $PA = AD = 2$, E, F, G 分别是 PA, PD, CD 的中点, 用空间向量法证明: 平面 $EFG \parallel$ 平面 PBC .



[素养小结]

证明面面平行的方法:

- (1) 转化为相应的线线平行或线面平行.
- (2) 分别求出这两个平面的法向量, 然后证明这两个法向量平行.

第3课时 空间中直线、平面的垂直

- 学习目标**
1. 能用直线的方向向量和平面的法向量刻画直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直.
 2. 能分析和解决一些立体几何中的垂直问题,体会向量方法与综合几何方法的共性和差异,体会直线的方向向量和平面的法向量的作用,感悟向量是研究几何问题的有效工具.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ 要点一 直线与直线垂直

两直线垂直的判定方法:

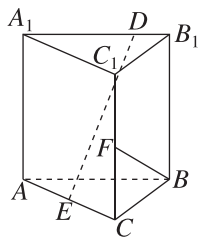
设直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 u_1, u_2 , 则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \underline{\quad\quad\quad} \Leftrightarrow \underline{\quad\quad\quad}$.

注意:(1)两直线垂直分为相交垂直和异面垂直,都可转化为两直线的方向向量相互垂直.

(2)向量法证明两直线垂直即证直线的方向向量互相垂直.

D 典例解析

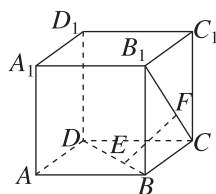
例1 [2026·广东深圳高二期中节选] 如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧面 AA_1B_1B 为正方形, $AB=BC=2$, E, F 分别为 AC 和 CC_1 的中点, $BF \perp A_1B_1$, D 为棱 A_1B_1 上一动点,证明: $BF \perp DE$ 恒成立.



变式 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E 在 BD 上,且 $BE = \frac{1}{3}BD$, 点 F 在 CB_1 上,且 $CF = \frac{1}{3}CB_1$.

求证:(1) $EF \perp BD$;

(2) $EF \perp CB_1$.



[素养小结]

用向量法证明空间中两条直线 l_1, l_2 相互垂直,其主要思路是证明两条直线的方向向量 a, b 相互垂直,只需证明 $a \cdot b = 0$ 即可,具体方法有以下两种:

(1)坐标法:用坐标表示出两条直线的方向向量,计算出两向量的数量积为0.

(2)向量法:将要证明的两条直线的方向向量用基向量表示出来,计算出两向量的数量积为0.

◆ 要点二 直线与平面垂直

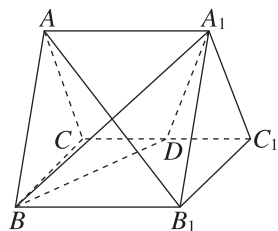
直线和平面垂直的判定方法:

设直线 l 的方向向量为 u , 平面 α 的法向量为 n , 则 $l \perp \alpha \Leftrightarrow \underline{\quad\quad\quad} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbf{R}$, 使得 $\underline{\quad\quad\quad}$.

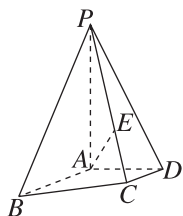


典例解析

例 2 如图所示,正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的棱长均为 2, D 为 CC_1 的中点. 求证: $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .

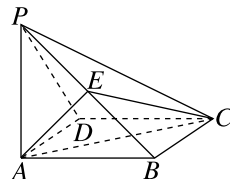


变式 [2026 · 河北沧州高二期中] 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $DA \perp AB$, $AB = AP = 2$, $DA = DC = 1$, E 为棱 PC 上一点,且 $PE = \frac{2}{3}PC$. 求证: $AE \perp$ 平面 PBC .

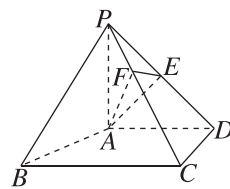


典例解析

例 3 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AB$, E 为棱 PB 的中点. 证明:平面 $AEC \perp$ 平面 PBC .



变式 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA = AD = CD = 2$, $BC = 3$, E 为 PD 的中点,点 F 在 PC 上,且 $\frac{PF}{FC} = \frac{1}{2}$. 求证:平面 $AEF \perp$ 平面 PCD .



◆ 要点三 平面与平面垂直

平面和平面垂直的判定方法:

设平面 α, β 的法向量分别为 n_1, n_2 , 则 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$

_____ $\Leftrightarrow$ _____.